MISCHUNGS- LEISTUNGS-, UND BEWEGUNGSAUFGABEN

Mischungsaufgaben

Um eine Mischungsaufgabe lösen zu können, braucht man sich nur die zwei Wörter „Menge“ und „Sorte“ merken. Dadurch entsteht eine Formel mit der sich alle Mischungsaufgaben lösen lassen. Diese lautet:

Menge1*Sorte1 + Menge2*Sorte2 + Menge3 Sorte3 +…= Menge Mischung*Sorte Mischung

Die Menge wird meistens in Kilogramm oder Liter angegeben, Beispiele für die Sorte sind %, €/kg, Karat, usw. Falls die Sorte in Prozent angegeben sein sollte, zuerst auf den Faktor mit „:100“ umrechnen. Also 30% => 0,3.

Wichtig: Die Menge der Mischung lässt sich immer errechnen, indem man die Mengen auf der linken Seite zusammenzählt. Die Sorte der Mischung ist immer ein Wert zwischen den Sorten auf der linken Seite (also bei Sorte 1 = 13% und Sorte 2 = 20% muss ein Wert zwischen 13% und 20% herauskommen.

Beispiel 1:

4 Liter Cola (20% Zucker) werden mit 7 Liter Fanta (9% Zucker) gemischt. Welchen Zuckeranteil hat die Mischung?

$M_1=4$; $S_1=0,2$; $M_2=7$; $S_2=0,09$ => Gesamtmenge muss 11 Liter sein, Sorte Mischung = x

Formel: Menge1*Sorte1 + Menge2*Sorte2 = Menge Mischung*Sorte Mischung

$4 * 0,2 + 7 * 0,09 = 11 * x$, dann zusammenfassen und umformen auf x, also

$0,8 + 0,63 = 11x \Rightarrow 1,43 = 11x \mid :11 \Rightarrow x = 0,13$ (=13%)

Beispiel 2:

Cola (20% Zucker) wird mit Fanta (9% Zucker) gemischt. Welche Mengen wurden zu einer 12 Liter-Mischung mit 13% verwendet?

$S_1=0,2$; $S_2=0,09$; Menge Mischung = 12 Liter; Sorte Mischung = 0,13; $M_1=x$; $M_2=y$

Formel: Menge1*Sorte1 + Menge2*Sorte2 = Menge Mischung*Sorte Mischung

$x * 0,2 + y * 0,09 = 12 * 0,13$

jetzt hat meine eine Gleichung mit 2 Unbekannten (x und y) und kann diese nicht ohne Hilfsgleichung lösen. Die Hilfsgleichung bekommt man, in dem man den oberen Satz **„Die Menge der Mischung lässt sich immer errechnen, indem man die Mengen auf der linken Seite zusammenzählt.“** bedenkt. Deshalb ist die Hilfsgleichung: $x + y = 12$

Diese formt man dann entweder auf x oder y um (z.B. **x = 12 – y**) und setzt sie in die eigentliche Gleichung ein.

(12 – y) * 0,2 + y * 0,09 = 12 * 0,13, dann zusammenfassen und umformen auf x

Beispiel 3:

Cola (20% Zucker) wird mit Fanta (9% Zucker) gemischt. In welchem Verhältnis wurden die beiden Mengen zu einer 13%igen Mischung verwendet?

S_1=0,2; S_2=0,09; Sorte Mischung = 0,13; M_1=x; M_2=y

Formel: Menge1*Sorte1 + Menge2*Sorte2 = Menge Mischung*Sorte Mischung

x * 0,2 + y * 0,09 = (x+y) * 0,13

jetzt hat meine wieder eine Gleichung mit 2 Unbekannten (x und y) und kann diese nicht ohne Hilfsgleichung lösen. Hilfsgleichung gibt es jetzt aber keine, da auch keine einzige Menge in der Angabe steht. Man bekommt also bei dieser Rechnung keine Werte für x und y heraus, nur ein Verhältnis der beiden Zahlen. Deswegen diese Gleichung soweit wie möglich vereinfachen.

x * 0,2 + y * 0,09 = (x+y) * 0,13

0,2x + 0,09y = 0,13x + 0,13y |-0,13x

0,07x + 0,09y = 0,13y |-0,09y

0,07x = 0,04y => Verhältnis 0,07 : 0,04 oder besser **7 : 4**

Falls bei einem Beispiel nichts gemischt wird, sondern aus einer Menge etwas z.B. **verdampft**, so schreibt man **statt** dem **+** in der Formel ein **-**.

Merke: Wasser hat immer einen Anteil von 0, daher Sorte bei Wasser = 0

Beispiel

200kg Sole mit Salzgehalt von 18% werden so lange erhitzt, bis 70kg Wasser verdampft sind. Wie groß ist der Salzgehalt der restlichen Sole.

Formel: Menge1*Sorte1 - Menge2*Sorte2 = Menge Mischung*Sorte Mischung

200*0,18 - 70*0 = 130*x

130 bekommt man, indem man weiß, dass von 200kg 70kg verdampfen. Dann können nur mehr 130kg übrig bleiben.

36 – 0 = 130x => 36 = 130x |:130 => x = 0,28 (=28%)

Der Salzgehalt muss in diesem Fall natürlich mehr werden, wenn man Wasser entzieht.

Leistungsaufgaben

Auch Leistungsaufgaben lassen sich immer nach einem bestimmten Schema lösen. Dazu ist es notwendig, dass man sich folgende Formel merkt. Die Formel hat parallelen zur Formel der Mischungsaufgaben. Mit Leistung 1 und Zeit 1 sind die Merkmale der/des ersten Pumpe/Krans/Roboters/Baggers/… gemeint, mit Leistung 2 und Zeit 2 der/des zweiten usw.

Leistung1*Zeit1 + Leistung2*Zeit2 + Leistung 3*Zeit3 +…= Volumen

Die Leistung (Achtung, damit ist immer die Leistung pro Min, Stunde, Tag,… gemeint) wird meistens als Bruchteil des Volumens angegeben. Das bedeutet, dass die Leistung pro Stunde bei einer Pumpe, die ein Becken in 8 Stunden alleine füllt, $\frac{V}{8}$ sein muss, denn jede Stunde schafft sie ein Achtel des Gesamtvolumens und in 8 Stunden ist daher das Becken voll. Das Volumen wird, wenn nicht mit einer Zahl angegeben, immer mit „V" abgekürzt, die Zeit mit „t" (von Englisch: time). Falls ein Gerät anstatt gleichzeitig, später eingesetzt wird, wird bei diesem bei „t" die Zeit abgezogen (bspw. 3 h später => statt t jetzt (t-3)).

<u>Beispiel 1:</u>

Ein Schwimmbecken wird durch 3 Pumpen gefüllt. Die erste Pumpe würde das Schwimmbecken in 6 Stunden füllen, die zweite Pumpe in 12 Stunden und die dritte Pumpe in 9 Stunden. Wie lange dauert die Füllung, wenn alle 3 Pumpen gemeinsam gleichzeitig eingesetzt werden?

<u>Formel:</u> Leistung1*Zeit1 + Leistung2*Zeit2 + Leistung 3*Zeit3 = Volumen

$$\frac{V}{6}*t + \frac{V}{12}*t + \frac{V}{9}*t = V \quad |\text{auf gem. Nenner}$$

$$\frac{V*6}{36}*t + \frac{V*3}{36}*t + \frac{V*4}{36}*t = V \quad |\text{zusammenfassen}$$

$$\frac{V*6*t + V*3*t + V*4*t}{36} = V \Rightarrow \frac{6Vt + 3Vt + 4Vt}{36} = V \Rightarrow \frac{13Vt}{36} = V \quad |*36$$

$13*V*t = V*36$ |:V => $13*t = 36$ |:13 => t = 2,77 Stunden

<u>Beispiel 2:</u>

Eine Glasfläche durch 3 Putzroboter gereinigt werden. Zwei ältere Modelle würden für die Arbeit alleine jeweils 15 Stunden benötigen, ein neu angeschaffter Putzroboter alleine 7,5 Stunden. Wie lange würde die Reinigung der Glasfassaden dauern, wenn zuerst ein alter und der neue, und 2 Stunden später auch der zweite alte Roboter eingesetzt werden würden?

<u>Formel:</u> Leistung1*Zeit1 + Leistung2*Zeit2 + Leistung 3*Zeit3 = Volumen

$$\frac{V}{15}*t + \frac{V}{7{,}5}*t + \frac{V}{15}*(t-2) = V \quad |\text{auf gem. Nenner}$$

$$\frac{V}{15}*t + \frac{V*2}{15}*t + \frac{V}{15}*(t-2) = V \quad |\text{zusammenfassen}$$

$$\frac{V*t + V*2*t + V*(t-2)}{15} = V \Rightarrow \frac{Vt + 2Vt + Vt - 2V}{15} = V \Rightarrow \frac{4Vt - 2V}{15} = V \quad |*15$$

$4*V*t - 2*V = V*15$ |:V => $4*t - 2 = 15$ |+2 => $4*t = 17$ |:5 => t = 4,25 Stunden

Falls bei einem Beispiel Geräte nicht zusammen, sondern **gegeneinander** arbeiten (z.B. Zufluss und Abfluss), so schreibt man **statt** dem **+** in der Formel ein **-**.

Zusatz: man kann statt dem „V“ für Volumen auch „A“ für Arbeit schreiben, falls es nicht um eine Befüllung, sondern, wie oben, um Roboter-Arbeit geht.

Beispiel:

Ein See wird durch zwei Zuflüsse gefüllt und kann durch ein Rohr entleert werden. Der erste Zufluss würde den See alleine in 65 Tagen füllen, der zweite würde dafür allein 45 Tage brauchen. Über das Abflussrohr kann der komplett gefüllte See in 39 Tage entleert werden.

a) Wie lange dauert es, den komplett leeren See zu füllen, wenn beide Zuflüsse gleichzeitig Wasser füllen (Abflussrohr zu)?

b) Wie lange dauert es, bis der See komplett gefüllt ist, wenn beide Zuflüsse und das Abflussrohr offen sind?

a) Formel: Leistung1*Zeit1 + Leistung2*Zeit2 = Volumen

$\frac{V}{65}*t + \frac{V}{45}*t = V$ |auf gem. Nenner

$\frac{V*9}{585}*t + \frac{V*13}{585}*t = V$ |zusammenfassen

$\frac{9Vt + 13Vt}{585} = V \Rightarrow \frac{22Vt}{585} = V$ |*585 => 22*V*t = 585*V |:V

22* t = 585 |:22 => t = 26,59 Tage

b) Formel: Leistung1*Zeit1 + Leistung2*Zeit2 - Leistung 3*Zeit3 = Volumen

$\frac{V}{65}*t + \frac{V}{45}*t - \frac{V}{39}*t = V$ |auf gem. Nenner

$\frac{V*9}{585}*t + \frac{V*13}{585}*t - \frac{V*15}{585}*t = V$ |zusammenfassen

$\frac{9Vt + 13Vt - 15Vt}{585} = V \Rightarrow \frac{7Vt}{585} = V$ |*585 => 7*V*t = 585*V |:V

7*t = 585 |:7 => t = 83,57 Tage

Bewegungsaufgaben

Bewegungsaufgaben kann man auf 2 unterschiedliche Weisen (entweder mit Formel oder mit Tabelle) lösen. Manche finden die erste, manche die zweite Variante besser. Ich werde euch deshalb beide Varianten erklären, dann könnt ihr selbst entscheiden, welche euch einfach vorkommt.

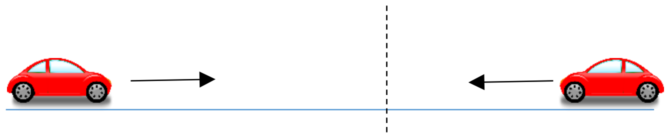
Bewegungstypen

Bei den Bewegungsaufgaben unterscheidet man grundsätzlich zwischen zwei verschiedenen Typen. Entweder beide Fahrzeuge fahren in die gleiche Richtung und einer startet später und holt den zweiten ein, oder beide fahren entgegengesetzt und treffen sich irgendwann.
Nun zu den beiden Bewegungstypen:

Typ 1: Beide fahren in die gleiche Richtung

Strecke ist meistens gleich, Zeit und Geschw. sind verschieden.

Typ 2: Beide fahren in die entgegengesetzte Richtung



Zeit ist meistens gleich, Strecke und Geschw. sind verschieden. Strecken der beiden Autos zusammen ist die Gesamtstrecke.

Wichtig hierbei ist zu wissen, dass beim Bewegungstyp 1 die Strecke meistens gleich ist, also beide fahren gleich weit fahren (es sei denn, es ist gegeben, dass einer der beiden weiter vorne startet). Beim Bewegungstyp 2 ist meistens die Zeit gleich (es sei denn, einer der beiden startet mit zeitlicher Verzögerung).

Variante 1: mit Formel

Bei beiden Bewegungstypen ist der Ansatz immer derselbe: man schreibt zuallererst die Formel für die Geschwindigkeit (für beide Fahrzeuge) auf und setzt die gegebenen Zahlen ein. Danach setzt man beide Formeln gleich. Die Formel für die die Geschwindigkeit „v“ lautet:

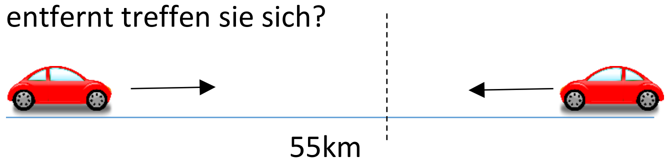
Geschwindigkeit = $\frac{Weg}{Zeit}$ oder abgekürzt: v = $\frac{s}{t}$

Auch diese Formel muss man nicht unbedingt auswendig lernen. Es reicht, wenn man die Einheit der Geschwindigkeit (km/h oder m/s) weiß. Über diese kann man sich die Formel herleiten. Die Geschwindigkeitseinheit km/h ist ein Bruch und könnte auch $\frac{km}{h}$ geschrieben werden. Um eine solche Einheit zu bekommen, muss man Kilometer (also den Weg) durch Stunden (also die Zeit) dividieren. Deshalb: Geschwindigkeit = Weg/Zeit. Würde man Weg*Zeit oder Zeit/Weg rechnen, würden die Einheiten kmh (statt km/h) bzw. h/km lauten.

Beispiel 1:

Zeit ist gleich => t1 und t2 werden einfach mit t bezeichnet

Zwei Autofahrer **starten gleichzeitig** in 55 km voneinander entfernten Ortschaften. Der erste legt 75, der zweite 90 km pro Stunde zurück. Wie weit vom Startort des ersten Fahrers entfernt treffen sie sich?



v = $\frac{s}{t}$ => Auto 1: $75 = \frac{s_1}{t}$ und Auto 2: $90 = \frac{s_2}{t}$ | beides umformen auf t und gleichsetzen

$t = \frac{s_1}{75}$ $t = \frac{s_2}{90}$ => $\frac{s_1}{75} = \frac{s_2}{90}$ |*75, *90 => $s_1 \cdot 90 = s_2 \cdot 75$

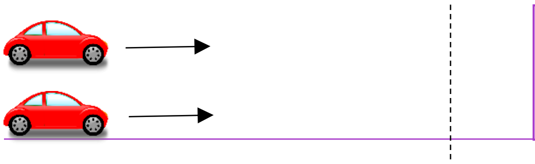
Nun hat man das Problem, dass 2 Variablen vorkommen, man es aber nur lösen kann, wenn 1 vorkommt. Man muss also das s_1 oder das s_2 ersetzen. Hierzu kann man eine Hilfsgleichung aufstellen. Oben wurde bereits beschrieben, dass bei diesem Bewegungstyp die beiden Strecken s_1 und s_2 zusammengezählt die Gesamtstrecke ergeben.

Deshalb: $s_1 + s_2 = 55$ => $s_1 = 55 - s_2$ |oben einsetzen => $(55 - s_2) \cdot 90 = s_2 \cdot 75$ => $4950 - 90s_2 = 75s_2$

|$+90s_2$ => $4950 = 165s_2$ |:165 => $s_2 = 30$km |einsetzen in s_1 => $s_1 = 55 - s_2$ => $s_1 = 25$

Beispiel 2:

Thomas fährt um 9.00 Uhr mit dem Fahrrad los. Er erreicht eine durchschnittliche Geschwindigkeit von 18 km/h. Um 9.30 folgt ihm Martina auf ihrem Moped, mit dem sie 40 km/h im Schnitt zurücklegt. Wann hat Martina Thomas **eingeholt**?



Strecke ist gleich => s1 und s2 werden einfach mit s bezeichnet. Die Zeit ist unterschiedlich, Martina fährt um 0,5h später ab => Thomas: t, Martina: t-0,5

$v = \frac{s}{t}$ => Thomas: $18 = \frac{s}{t}$ und Martina: $40 = \frac{s}{t-0{,}5}$ |beides umformen auf s und gleichsetzen

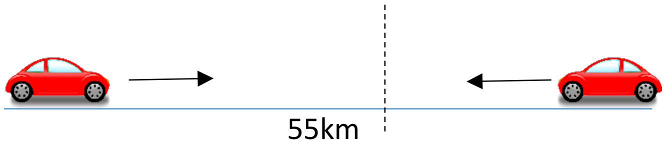
$s = 18 \cdot t$ $s = 40 \cdot (t-0{,}5)$ => $18 \cdot t = 40 \cdot (t-0{,}5)$ => $18t = 40t-20$ |$-40t$ => $-22t=-20$ |:(-22)

$t = 0{,}\overline{90}$ Stunden = $54{,}\overline{54}$ Minuten = 54 Minuten und 32,7 Sekunden

Es kann auch sein, dass beide entgegengesetzt, aber nicht gleichzeitig losfahren (also wie bei Beispiel 1, nur einer der beiden fährt später los.

Beispiel 3:

Zwei Autofahrer fahren von 95 km voneinander entfernten Ortschaften auf einander zu. Der erste legt 75, der zweite 90 km pro Stunde zurück. Wie weit vom Startort des ersten Fahrers entfernt treffen sie sich, wenn der zweite **45 Minuten später** losfährt?



Die Zeit ist unterschiedlich, 45min (=0,75h) später ab => t und (t-0,75)

$v = \frac{s}{t}$ => Auto 1: $75 = \frac{s_1}{t}$ und Auto 2: $90 = \frac{s_2}{t-0{,}75}$ |beides umformen auf t und gleichsetzen

$t = \frac{s_1}{75}$ $t = \frac{s_2}{90} + 0{,}75$ => $\frac{s_1}{75} = \frac{s_2}{90} + 0{,}75$ |*75, *90 => $s_1 \cdot 90 = s_2 \cdot 75 + 5062{,}5$

Wieder Hilfsgleichung mit s_1 und s_2 zusammengezählt = Gesamtstrecke.

Deshalb: $s_1 + s_2 = 95$ => $s_1 = 95 - s_2$ |oben einsetzen => $(95 - s_2) \cdot 90 = s_2 \cdot 75 + 5062{,}5$ =>

$8850 - 90s_2 = 75s_2 + 5062{,}5$ |$-5562{,}5$ => $3587{,}5 - 90s_2 = 75s_2$ |$+90s_2$ => $3587{,}5 = 165s_2$ |:165

=> $s_2 = 21{,}14$km |einsetzen in s_1 => $s_1 = 95 - s_2$ => $s_1 = 73{,}86$

Variante 2: mit Tabelle

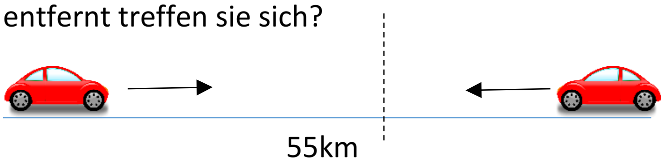
Hierbei macht man sich eine Tabelle mit den Spalten v, t und s. s berechnet man dann immer, indem man v*t rechnet. Wenn die Strecke gleich ist (Bewegungstyp 1), setzt man die beiden Inhalte in der Spalte s einfach gleich, ist die Strecke verschieden und eine Gesamtstrecke gegeben (Bewegungstyp 2), so addiert man beide.

Geschwindigkeit v	Zeit t	Strecke s

Beispiel 1:

Zeit ist gleich => t1 und t2 werden einfach mit t bezeichnet

Zwei Autofahrer **starten gleichzeitig** in 55 km voneinander entfernten Ortschaften. Der erste legt 75, der zweite 90 km pro Stunde zurück. Wie weit vom Startort des ersten Fahrers entfernt treffen sie sich?

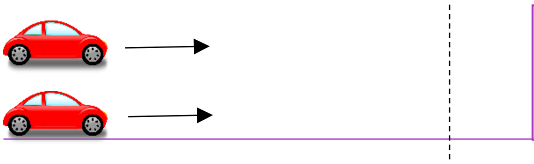


Geschwindigkeit v	Zeit t	Strecke s
75	t	75*t
90	t	90*t
		55

75t + 90t = 55 => 165t = 55 |:165 => t = $0,\dot{3}$ => einsetzen => s1 = 75*t => s1 = 25 und s2 = 30

Beispiel 2:

Thomas fährt um 9.00 Uhr mit dem Fahrrad los. Er erreicht eine durchschnittliche Geschwindigkeit von 18 km/h. Um 9.30 folgt ihm Martina auf ihrem Moped, mit dem sie 40 km/h im Schnitt zurücklegt. Wann hat Martina Thomas **eingeholt**?



Strecke ist gleich => s1 und s2 werden einfach mit s bezeichnet. Die Zeit ist unterschiedlich, Martina fährt um 0,5h später ab => Thomas: t, Martina: t-0,5

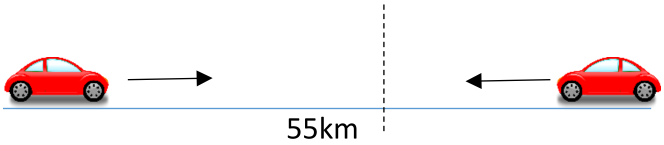
Geschwindigkeit v	Zeit t	Strecke s
18	t	18*t
40	t-0,5	40*(t-0,5)

18t = 40*(t-0,5) => 18t = 40t-20 |+20 und |-18t => 20 = 22t |:22 => t = $0,\overline{90}$ Stunden = $54,\overline{54}$ Minuten = 54 Minuten und 32,7 Sekunden

Es kann auch sein, dass beide entgegengesetzt, aber nicht gleichzeitig losfahren (also wie bei Beispiel 1, nur einer der beiden fährt später los.

Beispiel 3:

Zwei Autofahrer fahren von 95 km voneinander entfernten Ortschaften auf einander zu. Der erste legt 75, der zweite 90 km pro Stunde zurück. Wie weit vom Startort des ersten Fahrers entfernt treffen sie sich, wenn der zweite **45 Minuten später** losfährt?



Die Zeit ist unterschiedlich, 45min (=0,75h) später ab => t und (t-0,75)

Geschwindigkeit v	Zeit t	Strecke s
75	t	75*t
90	t-0,75	90*(t-0,75)
		95

$75t + 90*(t-0{,}75) = 95 \Rightarrow 75t + 90t - 67{,}5 = 95$ |+67,5 $\Rightarrow 165t = 162{,}5$ |:165 $\Rightarrow t = 0.9\overline{48}$
$s_1 = 75*t \Rightarrow s1 = 73.86\overline{36}$ und $s_2 = 90*(t-0{,}75) \Rightarrow s2 = 21.1\overline{36}$